模块四 双曲线与方程

第 1 节 双曲线的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

强化训练

1．（★）双曲线$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，P在双曲线上，且$|PF_2|=4\sqrt{2}$，则$|PF_1|=$______.

答案： $6\sqrt{2}$或$2\sqrt{2}$

解析： 在双曲线中，已知$|PF_1|$求$|PF_2|$，用定义即可，

由题意，$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2\sqrt{2}$，所以$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2\sqrt{2}$，

故$|PF_1|=|PF_2|\pm 2\sqrt{2}$，又$|PF_2|=4\sqrt{2}$，

所以$|PF_1|=6\sqrt{2}$或$2\sqrt{2}$.

2．（2021·全国甲卷·★）点$(3,0)$到双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的一条渐近线的距离为（　　）

（A）$\dfrac{9}{5}$　　（B）$\dfrac{8}{5}$　　（C）$\dfrac{6}{5}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

答案： A

解析： 双曲线的渐近线为$y=\pm\dfrac{3}{4}x$，即$3x\pm 4y=0$，

所以点$(3,0)$到渐近线的距离$d=\dfrac{|3\times 3|}{\sqrt{3^2+(\pm 4)^2}}=\dfrac{9}{5}$.

3．（2021·全国乙卷·★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$，则$C$的焦距为______.

答案： 4

解析： 给出了一条渐近线，可通过比较渐近线斜率求m，

由题意，$a=\sqrt{m}$，$b=1\Rightarrow$双曲线C的渐近线为$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}x$，

$\sqrt{3}x+my=0\Rightarrow y=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}x$，因为$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{m}x$是其中一条渐近线，所以$-\dfrac{\sqrt{3}}{m}=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$，解得：$m=3$，

所以$c=\sqrt{m+1}=2$，故C的焦距为4.

4．（★）若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为______.

答案： $y=\pm\sqrt{2}x$

解析： 已知离心率求渐近线，可对a和c按比例赋值，并求出b，

由题意，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，不妨设 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$，

双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，代入数据得 $y=\pm\sqrt{2}x$.

5.（★）若方程 $\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，则实数 m 的取值范围为_____.

答案： $(-1,2)$

解析： 所给方程表示焦点在 x 轴上的双曲线，可将其化为标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的形式，再比较系数，

由 $\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 可得 $\frac{x^2}{m+1}-\frac{y^2}{2-m}=1$，所以 $\begin{cases}a^2=m+1>0\\b^2=2-m>0\end{cases}$，解得：$-1<m<2$.

6.（2023·山西朔州模拟·★★）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，右焦点为 F，y 轴上一点 $M(0,b)$ 满足 $|AM|-|AF|=2b$，则该双曲线的离心率为_____.

答案： $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解析： 由题意，$A(a,0)$，$F(c,0)$，$M(0,b)$，所以 $|AM|-|AF|=\sqrt{a^2+b^2}-(c-a)=c-c+a=a$，

又 $|AM|-|AF|=2b$，所以 $a=2b$，故 $a^2=4b^2=4(c^2-a^2)$，整理得：$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

7.（2022·云南玉溪模拟·★★）方程 $\sqrt{(x+10)^2+y^2}-\sqrt{(x-10)^2+y^2}=12$ 化简的结果为（　　）

（A）$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$　（B）$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$　（C）$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1(x\ge 6)$　（D）$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1(x\ge 8)$

答案： C

解析： 所给等式的形式为距离之差，可联想到双曲线的定义，

记 $F_1(-10,0)$，$F_2(10,0)$，$P(x,y)$，则所给方程等价于 $|PF_1|-|PF_2|=12$，

所以点 P 在以 F_1F_2 为焦点的双曲线的右支上，该双曲线的半焦距 $c=10$，$12=2a\Rightarrow a=6$，

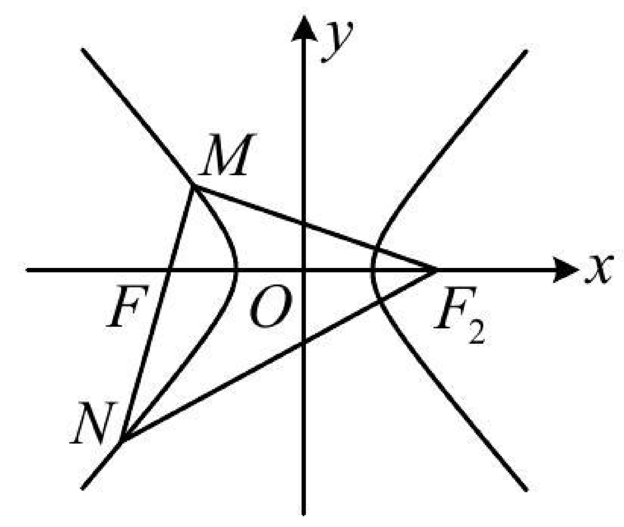
所以 $b^2=c^2-a^2=64$，故原方程化简的结果为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1(x\ge 6)$.

8.（★★）过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F 的直线交双曲线的左支于 M，N 两点，F_2 为其右焦点，则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为_____.

答案： 8

解析： 涉及双曲线上的点 M，N 到右焦点 F_2 的距离，想到定义，先把两个式子写出来再与所求对比，

由双曲线定义，$\begin{cases}|MF_2|-|MF|=4\\|NF_2|-|NF|=4\end{cases}$，两式相加得：$|MF_2|+|NF_2|-(|MF|+|NF|)=|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.



9．（2023・吉林模拟・★★★）若三个点 $P_1(-3,1)$， $P_2(-2,3)$， $P_3(3,-1)$ 中恰有两个点在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 上，则双曲线的渐近线方程为_____.

答案： $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}x$

解析： 需先判断是哪两个点在双曲线 C 上，讨论各种可能的情况较麻烦，观察发现 P_1， P_3 关于原点对称，而双曲线 C 也关于原点对称，所以 P_1， P_3 同时在或同时不在双曲线 C 上，

由对称性知在双曲线 C 上的两个点是 P_1 和 P_3，不妨将 P_3 代入 C 的方程可得 $\dfrac{3^2}{a^2}-(-1)^2=1$，所以 $a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

又 $b=1$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故所求渐近线为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}x$.

10．（2023・青海玉树模拟・★★★）已知 F_1， F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，点 P 是 C 的右支上的一点，则 $\dfrac{|PF_1|^2}{|PF_2|}$ 的最小值为（　　）

（A）16　（B）18　（C）$8+4\sqrt{2}$　（D）$9+\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

答案： A

解析： 目标中有 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，想到双曲线的定义，

由题意，$|PF_1|-|PF_2|=4$，所以 $|PF_1|=|PF_2|+4$，

故 $\dfrac{|PF_1|^2}{|PF_2|}=\dfrac{(|PF_2|+4)^2}{|PF_2|}=\dfrac{|PF_2|^2+8|PF_2|+16}{|PF_2|}$

$=|PF_2|+\dfrac{16}{|PF_2|}+8\ge 2\sqrt{|PF_2|\cdot\dfrac{16}{|PF_2|}}+8=16$，

取等条件是 $|PF_2|=\dfrac{16}{|PF_2|}$，即 $|PF_2|=4$，所以 $(\dfrac{|PF_1|^2}{|PF_2|})_{\min}=16$.

11．（2020・新高考 I 卷・★★★）（多选）已知曲线 $C:mx^2+ny^2=1$.（　　）

（A）若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

（B）若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

（C）若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

（D）若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

答案：ACD

解析：A 项，当 $m>n>0$ 时，$0<\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$，接下来把曲线 C 化为标准方程，看焦点在哪里，

由 $mx^2+ny^2=1$ 可得 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，所以 C 是焦点在 y 轴上的椭圆，故 A 项正确；

B 项，若 $m=n>0$，则 $mx^2+ny^2=1$ 即为 $x^2+y^2=\frac{1}{n}$，它表示半径为 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的圆，故 B 项错误；

C 项，若 $mn<0$，则 C 是双曲线，此处不清楚焦点在哪条坐标轴，可用求渐近线的统一方法，

在所给方程中将 1 换成 0 得 $mx^2+ny^2=0$，所以 $y^2=-\frac{m}{n}x^2$，从而渐近线为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$，故 C 项正确；

D 项，若 $m=0$，$n>0$，则所给方程可化为 $y^2=\frac{1}{n}$，即 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$，所以 C 是两条直线，故 D 项正确.

12.（★★★）双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 $A(3,1)$，P 为双曲线右支上一动点，则 $|PA|-|PF_1|$ 的最大值为_____.

答案：$1-2\sqrt{3}$

解析：如图，直接分析 $|PA|-|PF_1|$ 的最大值不易，涉及 $|PF_1|$，可利用双曲线定义转化为 $|PF_2|$ 来看，

由题意，$F_2(3,0)$，$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}$，所以 $|PF_1|=|PF_2|+2\sqrt{3}$，故 $|PA|-|PF_1|=|PA|-|PF_2|-2\sqrt{3}$ ①，

由三角形两边之差小于第三边知 $|PA|-|PF_2|\le|AF_2|=1$，当且仅当 P 位于图中 P_0 处时等号成立，

结合①可得 $|PA|-|PF_1|\le 1-2\sqrt{3}$，所以 $|PA|-|PF_1|$ 的最大值为 $1-2\sqrt{3}$.